Escuela Técnica Superior de Ingenieros de

Caminos, Canales y Puertos

Universidad de Castilla-La Mancha, Campus de Ciudad Real

Curso Cero-Matemáticas

4. Funciones Trigonométricas

4.1 Introducción

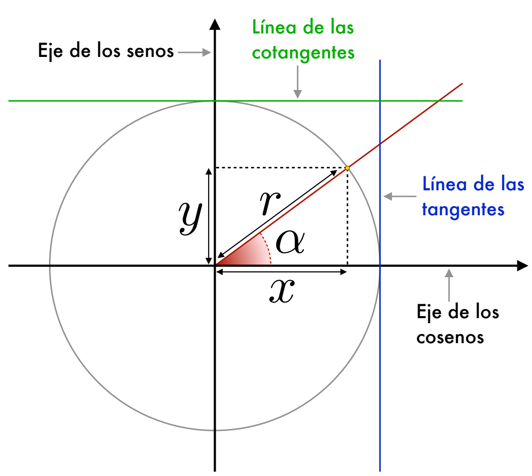
La trigonometría es la parte de la geometría que se dedica al estudio de las razones entre los lados de un triángulo y sus generalizaciones angulares a cuerpos más complejos. Se aplica directa o indirectamente en aquellos problemas donde se requieren medidas de ángulos de gran precisión. En este tema revisaremos las funciones trigonométricas y sus propiedades más relevantes, así como diversas ecuaciones y situaciones prácticas en las que aparecen.

Un problema muy sencillo que surge habitualmente es el cálculo de la longitud de uno de los lados de un triángulo dado a partir de otro de los lados y ángulos de ese triángulo. El concepto de **razón trigonométrica** nos relaciona los ángulos de un triángulo con sus lados.

Consideremos la figura adjunta en la que se muestra una circunferencia de radio r y un triángulo rectángulo de hipotenusa r y catetos horizontal x y vertical y junto con el ángulo α del vértice que pasa por el centro de la circunferencia.

Se tienen las siguientes razones trigonométricas:

- $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{y}{r}.$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{x}{r}.$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{y}{x}.$
- $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{x}{y}.$



Las razones trigonométricas seno (sen), coseno (cos), tangente (tg) y cotangente (cotg) se definen como funciones del ángulo α, el cual puede tomar cualquier valor real.

Función seno: El seno es una función trigonométrica definida para cualquier número real de la variable angular α y todos sus valores están comprendidos en el intervalo $[-1,1]$.

Propiedades de la función seno: para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$.
- $\operatorname{sen}(\alpha+2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$: periódica con periodo 2π.
- $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$. Es decir, es una función *impar* (cambia de signo si el argumento lo hace).
- $\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$.
- $\operatorname{sen}\alpha_k = 0$ si $\alpha_k = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Esto es, los α_k son los ceros de la función seno.

Función coseno: El coseno es una función trigonométrica definida para cualquier número real de la variable angular α y todos sus valores están comprendidos en el intervalo $[-1,1]$.

Propiedades de la función coseno: para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
- $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$: periódica con periodo 2π.
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Es decir, es una función *par* (no cambia de signo si el argumento lo hace).
- $\cos(\alpha+\pi/2) = -\operatorname{sen}\alpha$.
- $\cos\alpha_k = 0$ si $\alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Esto es, los α_k son los ceros de la función coseno.

Función tangente: La tangente es una función trigonométrica definida solo para números reales α tales que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. La imagen de la tangente es todo el conjunto $\mathbb{R}$.

Propiedades de la función tangente: para todo $\alpha \in \text{dominio}(\text{tg})$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
- $\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}\alpha$: periódica con periodo π.
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Es decir, es una función *impar* (cambia de signo si el argumento lo hace).
- $\operatorname{tg}\alpha_k = 0$ si $\alpha_k = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Esto es, los α_k son los ceros de la función tangente.

Función cotangente. La cotangente es una función trigonométrica definida solo para números reales α tales que $\alpha \neq k\pi$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. La imagen de la tangente es todo el conjunto $\mathbb{R}$.

Propiedades de la función cotangente: para todo $\alpha \in \text{dominio}(\text{cotg})$
- $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.
- $\operatorname{cotg}(\alpha+\pi) = \operatorname{cotg}\alpha$: periódica con periodo π.
- $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$. Es decir, es una función *impar* (cambia de signo si el argumento lo hace).
- $\operatorname{cotg}\alpha_k = 0$ si $\alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Esto es, los α_k son los ceros de la función cotangente.

En la figura 4.1 de la página siguiente se representan las gráficas de las cuatro funciones trigonométricas anteriores. El ángulo α que aparece en esas gráficas está medido en *radianes*. Recuérdese que un radián es aquel ángulo subtendido desde el centro de una circunferencia de radio r por un arco cuya longitud es igual a r. La relación entre radián y grados es: 1 radián $= 180^\circ/\pi \simeq 57.29577951^\circ$. La equivalencia entre algunos ángulos importantes expresados en grados y en radianes: $180^\circ = \pi$ radianes, $90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$ radianes $45^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$ radianes y $30^\circ \equiv \frac{\pi}{6}$ radianes.

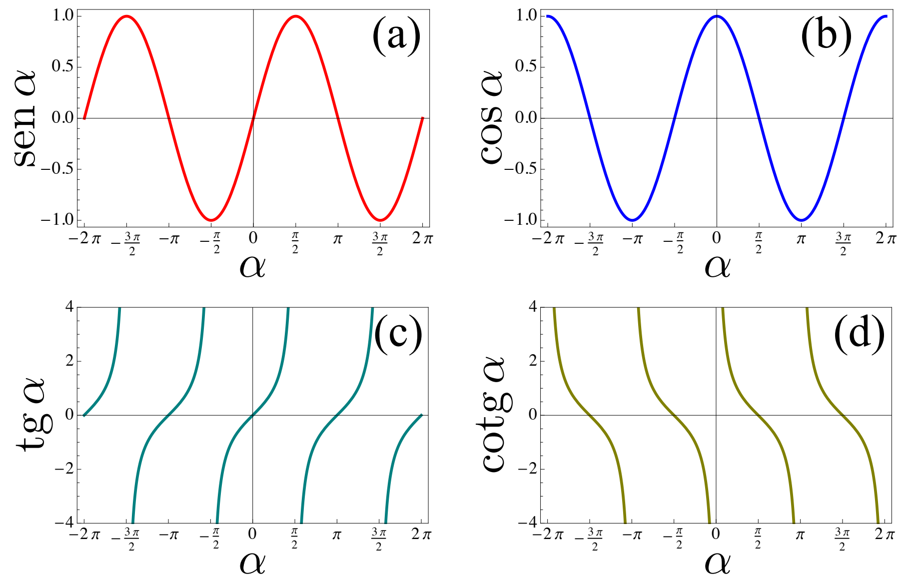


Figura 4.1: Gráficas de las funciones trigonométricas (a) seno; (b) coseno; (c) tangente y (d) cotangente en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Fórmulas trigonométricas: Las funciones trigonométricas satisfacen un conjunto de identidades y relaciones, para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$, que simplifica mucho su manejo. Algunas de las más importantes se recogen a continuación:

- $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$.
- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$.
- $\operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.
- $\operatorname{sen}^2 \left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos \alpha}{2}$.
- $\cos^2 \left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos \alpha}{2}$.
- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$.
- $a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \beta = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Mediante las fórmulas anteriores podemos demostrar muchas otras identidades trigonométricas, como la siguiente:

$$\operatorname{sen}^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para ello, recurrimos a la identidad $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, de donde se deduce que si la elevamos al cubo y recordando el desarrollo $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, se obtiene

$$\left(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)^3 = 1^3 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}^6 \alpha + 3 \operatorname{sen}^4 \alpha \cos^2 \alpha + 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^4 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 \;\Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^6 \alpha + 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha \underbrace{\left(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)}_{=1} + \cos^6 \alpha = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Funciones trigonométricas inversas: Las funciones trigonométricas anteriores poseen funciones inversas definidas sobre ciertos intervalos. Si, por ejemplo, $x = \operatorname{sen} y$, entonces $y = \operatorname{arc\,sen} x$ representa el ángulo cuyo seno es x. Como la función seno es periódica, existen infinitos valores para y que satisfacen $x = \operatorname{sen} y$, por lo que hay que seleccionar un intervalo adecuado para y, son los llamados *valores principales*. De manera análoga, se pueden definir funciones trigonométricas inversas para $\cos y$, $\operatorname{tg} y$ y $\operatorname{cotg} y$, denotadas por $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ y $\operatorname{arc\,cotg} x$, respectivamente. Indicamos a continuación algunas de las propiedades más importantes que cumplen los valores principales de las funciones trigonométricas inversas:

- $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$ para $-\infty < x < \infty$.
- $\operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,cotg} x) = x$ para $-\infty < x < \infty$.
- $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc\,sen} x \leq \frac{\pi}{2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $0 \leq \operatorname{arc\,cos} x \leq \pi$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$ para $-\infty < x < \infty$.
- $0 < \operatorname{arc\,cotg} x < \pi$ para $-\infty < x < \infty$.
- $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\operatorname{arc\,sen}(-x) = -\operatorname{arc\,sen} x$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\operatorname{arc\,cos}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,cos} x$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$ para $-\infty < x < \infty$.
- $\operatorname{arc\,cotg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,cotg} x$ para $-\infty < x < \infty$.
- $\operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$ para $0 \leq x \leq 1$ y $\operatorname{arc\,sen} x = -\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$ para $-1 \leq x \leq 0$.
- $\operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ para $-1 < x < 1$.

Las funciones trigonométricas inversas aparecen muy frecuentemente en la resolución de ecuaciones trigonométricas como veremos a continuación.

Ecuaciones trigonométricas. La resolución de ecuaciones que involucran funciones trigonométricas se basa, principalmente, en la aplicación de alguna de las propiedades y fórmulas presentadas.

Ejemplo: Resolver la ecuación $2\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha = 1$.

Procedemos del siguiente modo

$$2\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}\alpha - \frac{3}{\operatorname{tg}\alpha} - 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 3 = 0.$$

Si definimos la variable $z = \operatorname{tg}\alpha$, entonces la ecuación se reduce a una ecuación de segundo grado $2z^2 - z - 3 = 0$. Aplicando la fórmula cuadrática, las dos posibles soluciones son

$$z = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad z = -1.$$

Entonces, deshaciendo el cambio de variable, concluimos que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{2}\right) + k\pi \quad \text{y} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}(-1) + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La ecuación $2\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha = 1$ tiene una infinidad de soluciones que pertenecen al conjunto:

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{2}\right) + k\pi \quad \text{y} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}(-1) + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

4.2 Problemas Resueltos

1. A partir de las fórmulas de adición de senos y cosenos, deduce la fórmula:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Solución: Utilizando el hecho de que

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\operatorname{sen}x\cos y+\operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y},$$

donde en el último paso hemos empleado las fórmulas de adición de ángulos del seno y el coseno, si dividimos numerador y denominador por el factor $\cos x\cos y$, llegamos finalmente a la expresión buscada. Es importante señalar que para que dicha expresión sea válida es necesario que $\cos x\cos y\neq 0$.

2. Encuentra una fórmula para expresar $\operatorname{sen}(3\alpha)$ que dependa únicamente de $\operatorname{sen}\alpha$.

Solución: Comenzamos utilizando la siguiente identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

con $\beta=2\alpha$, de modo que se tendrá

$$\operatorname{sen}(3\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos(2\alpha)+\cos\alpha\operatorname{sen}(2\alpha). \tag{4.1}$$

Si ahora empleamos las fórmulas para el ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha,\quad \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha,$$

y las sustituimos en (4.1), obtendremos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3\alpha)&=\operatorname{sen}\alpha\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)+\cos\alpha\,(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\\&=\operatorname{sen}\alpha\left(1-2\operatorname{sen}^2\alpha\right)+2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\\&=\operatorname{sen}\alpha\left(1-2\operatorname{sen}^2\alpha\right)+2\operatorname{sen}\alpha\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right)\\&=\operatorname{sen}\alpha\left(3-4\operatorname{sen}^2\alpha\right),\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la identidad $\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$ para que únicamente apareciera la función $\operatorname{sen}\alpha$. Observemos que la última expresión encontrada solo depende de $\operatorname{sen}\alpha$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos^2\alpha-3\operatorname{sen}^2\alpha=0$. *b)* $\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$. *c)* $\operatorname{sen}(2\alpha)\cos\alpha=6\operatorname{sen}^3\alpha$.

Soluciones: *a)* Para resolver la primera ecuación trigonométrica podemos hacer uso de la identidad $\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$ con objeto de que solo aparezca la función $\operatorname{sen}\alpha$. Al hacerlo, la ecuación resultante es $1-4\operatorname{sen}^2\alpha=0$. Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{1}{2}.$$

Por tanto, las posibles soluciones corresponderán a aquellos ángulos α_+ y α_- para los cuales la función seno sea igual o bien a $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$, respectivamente. Esto ocurre para los siguientes conjuntos de valores

$$\alpha_+ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \alpha_- = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ es un número entero cualquiera (positivo, negativo o cero). Observamos pues que la ecuación $\cos^2\alpha - 3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha = 0$ posee dos conjuntos infinitos de soluciones.

b) La ecuación $\mathrm{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ se puede escribir de una manera más conveniente empleando la identidad $\mathrm{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha = -\cos(2\alpha)$. Por tanto, debemos hallar lo valores de α para los que se cumple que

$$\cos(2\alpha) = -\frac{1}{2}\,.$$

Esto sucede cuando $2\alpha = \frac{4\pi}{3}$ radianes, así como para todos aquellos ángulos dobles que difieran de $\frac{4\pi}{3}$ radianes en un múltiplo entero de 2π radianes. Es decir, todas las soluciones de la ecuación de partida vendrán dadas por el conjunto infinito de valores

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{3} + k\pi\,,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ es un número entero cualquiera (positivo, negativo o cero).

c) Comenzamos haciendo uso de la identidad trigonométrica $\mathrm{sen}(2\alpha) = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$, de modo que la ecuación de partida se convierte en

$$\mathrm{sen}(2\alpha)\cos\alpha = 6\,\mathrm{sen}^3\,\alpha \quad \Rightarrow \quad 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha = 6\,\mathrm{sen}^3\,\alpha\,.$$

A continuación, utilizamos la identidad $\cos^2\alpha = 1 - \mathrm{sen}^2\,\alpha$ con objeto de que solo aparezca la función $\mathrm{sen}\,\alpha$ en la ecuación. Simplificando, obtenemos

$$2\,\mathrm{sen}\,\alpha\left(1 - \mathrm{sen}^2\,\alpha\right) = 6\,\mathrm{sen}^3\,\alpha \quad \Rightarrow \quad 4\,\mathrm{sen}^3\,\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha = 0\,.$$

La última ecuación se puede factorizar como

$$\left(4\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - 1\right)\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}\,\alpha = 0, \text{ o bien, } 4\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - 1 = 0.$$

El primero de los casos, $\mathrm{sen}\,\alpha = 0$, se cumple si $\alpha_k = k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$ un número entero cualquiera (positivo, negativo o cero). El segundo de los casos, $\mathrm{sen}\,\alpha = \pm\frac{1}{2}$, se satisface si $\alpha_k = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ un número entero cualquiera (positivo, negativo o cero).

4. Sea $t = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Deduce entonces las siguientes identidades:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2t}{1-t^2}\,, \quad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Solución: Estas tres identidades son de gran utilidad cuando sea necesario realizar cambios de variable para las funciones trigonométricas, por ejemplo, al calcular integrales. Comenzamos deduciendo la primera de ellas. Para ello, utilizamos la identidad para el ángulo doble

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}\,.$$

Si elegimos $x = y = \frac{\alpha}{2}$, entonces

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Como $t = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, se encuentra fácilmente de la última relación que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Para deducir la segunda identidad, partimos de la fórmula para el ángulo doble

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

que, por conveniencia, podemos rescribir de la siguiente manera

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

donde hemos supuesto que $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0$. Dado que

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

y $t = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, despejando $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, encontramos que

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Por tanto, de

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2},$$

que es la segunda identidad que queríamos deducir.

Finalmente, la última identidad se sigue de la fórmula para el ángulo doble

$$\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1.$$

Puesto que $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$, entonces se concluye que

$$\cos\alpha = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. Sean a, b, c y d números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

$$a^2+b^2 = 1, \quad c^2+d^2 = 1 \quad \text{y} \quad ac+bd = 0.$$

Hallar el valor de $ab+cd$.

Solución: Este problema no parece involucrar funciones trigonométricas, sin embargo se puede resolver haciendo uso de las mismas. Para ello introducimos las cantidades

$$a = \operatorname{sen}\alpha, \quad b = \cos\alpha, \quad c = \operatorname{sen}\beta \quad \text{y} \quad d = \cos\beta.$$

Es claro que dichas definiciones cumplen automáticamente las condiciones $a^2+b^2=1$ y $c^2+d^2=1$. Por otro lado, de la tercera condición, tenemos

$$ac+bd=\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\cos\alpha\cos\beta=0.$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, se sigue que $\cos(\alpha-\beta)=0$. De modo similar, la expresión cuyo valor se pide, es igual a

$$ab+cd=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\cos\beta \quad\Rightarrow\quad ab+cd=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\beta)\right]$$

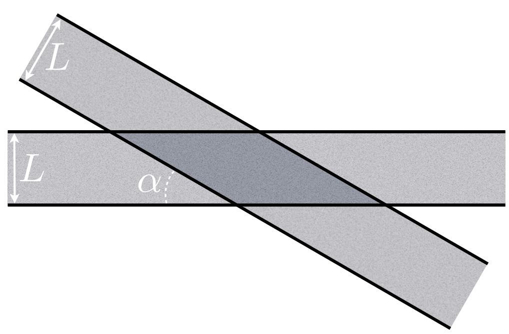
donde hemos utilizado la fórmula del ángulo doble para cada término $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta\cos\beta$. A continuación, vamos a emplear más identidades trigonométricas para transformar la última expresión en otra que nos permita encontrar el resultado buscado. Consideremos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\beta) &= \operatorname{sen}\left[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\right]+\operatorname{sen}\left[(\beta+\alpha)+(\beta-\alpha)\right]\\ &= \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\\ &+ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)+\operatorname{sen}(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta)\\ &= 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)\,,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=-\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$ para simplificar. Concluimos que

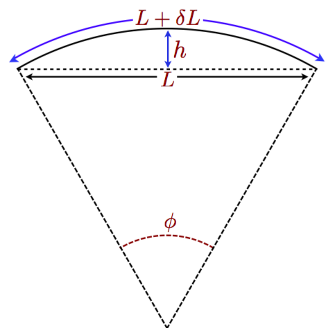
$$ab+cd=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\beta)\right]=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0\,.$$

6. Dos carreteras de anchura L se cruzan entre sí subtendiendo un ángulo α entre ellas (figura inferior). Se desea cubrir la zona de intersección entre ambas carreteras con una capa de hormigón asfáltico (u hormigón bituminoso) de espesor constante h. Si la densidad (masa/volumen) del asfalto la denotamos por ρ, encuentra una expresión para la masa total M de hormigón asfáltico que se necesita para cubrir toda la intersección en función de ρ, h, L y α.



Solución: La masa total M de hormigón asfáltico que nos piden es igual al producto de su densidad, ρ, por el volumen V que ocupa la zona de intersección entre ambas carreteras. El volumen será $V=hA$, donde A es el área de la zona de intersección. Dicha intersección tiene forma de rombo, tal y como muestra la figura superior. El área A de un rombo es igual a su altura por la base. La altura del rombo es L mientras que la base tiene una longitud igual a $L/\operatorname{sen}\alpha$. Así pues, $A=\dfrac{L^2}{\operatorname{sen}\alpha}$ y el volumen correspondiente $V=\dfrac{hL^2}{\operatorname{sen}\alpha}$. Concluimos entonces que la expresión buscada para la masa total de hormigón asfáltico es $M=\dfrac{\rho hL^2}{\operatorname{sen}\alpha}$. Nótese que cuanto menor sea α, mayor será la masa M.

7. Como consecuencia de las altas temperaturas registradas durante el verano, uno de los raíles de un tramo de vía ferroviaria, que tenía inicialmente una longitud L (en llano), se alarga δL. Supongamos que los extremos del tramo que se dilata permanecen fijos y que dicho tramo se deforma dando lugar a un arco de circunferencia (ver figura inferior). Se desea encontrar una relación que permita determinar la altura máxima h que se elevará el centro del raíl con respecto a la horizontal. Para ello, hay que deducir primeramente una ecuación trigonométrica correspondiente al ángulo ϕ que subtiende el arco de circunferencia que forma el raíl flexionado y después relacionar ϕ con h.



a) Demuestra que la ecuación trigonométrica que proporciona el ángulo ϕ que subtiende el arco de circunferencia que forma el raíl flexionado es:

$$\frac{2(L+\delta L)}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)-\phi=0\,.$$

b) No es necesario que resuelvas la ecuación trigonométrica anterior. Deduce entonces que la relación que guarda la altura máxima h con el ángulo ϕ viene dada por:

$$h=\frac{L}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\phi}{4}\right).$$

Solución: *a*) Consideremos primeramente el radio R del arco circular que describe el abombamiento del raíl. Sea ϕ el ángulo que subtiende dicho arco. Se cumplen las siguientes relaciones geométricas:

$$\phi R=L+\delta L\,,\quad L=2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right),\quad R=h+R\cos\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Ignoramos cuáles son los valores de R y ϕ. Despejamos R en la segunda ecuación anterior y la sustituimos en la primera, de donde hallamos una de las ecuaciones que pide el enunciado

$$\phi=\frac{2(L+\delta L)}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

b) La segunda de las ecuaciones que necesitamos la podemos deducir combinando dos de las ecuaciones anteriores. Por un lado, tenemos que

$$R=h+R\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad R\left[1-\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]=h\quad\Rightarrow\quad R=\frac{h}{2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\phi}{4}\right)}\,,$$

donde hemos usado la identidad $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{2}$. Por otro lado,

$$L = 2R\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad L = 4R\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{4}\right)\cos\left(\frac{\phi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad 2R\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{4}\right) = \frac{L}{2\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)}.$$

Reemplazando esta última expresión en la que proporciona R, encontramos finalmente la segunda de las ecuaciones que buscábamos, $h = \frac{L}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{4}\right)$.

4.3 Problemas Propuestos

1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $|a\cos\alpha| \leq a$ para cualquier $a > 0$.

c) $|\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha| \leq \sqrt{2}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Respuestas:

a) Falsa. Por ejemplo, si tomamos $x = y = \dfrac{\pi}{6}$, entonces $\operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 1$, lo cual no puede satisfacer $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y$.

b) Verdadera. Como $|\cos\alpha| \leq 1$, se tiene que $|a\cos\alpha| \leq |a| = a$, donde la última igualdad es cierta puesto que $a > 0$.

c) Verdadera. Elevando al cuadrado el miembros izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha|^2 &= \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \\ &+ 2|\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha| \\ &= 1 + |\operatorname{sen}(2\alpha)|. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}(2\alpha) \leq 1$, se concluye el resultado al extraer la raíz cuadrada.

2. Expresa las siguientes funciones:

$$a)\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right). \qquad b)\ \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

en términos de las funciones $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$, respectivamente:

Respuestas: *a)* $\cos\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$. *b)* $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a)\ \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2. \qquad b)\ 2\cos\alpha = 3\operatorname{tg}\alpha. \qquad c)\ 4\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\cos\alpha = 3.$$

Respuestas: *a)* $\alpha_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. *b)* Hay dos conjuntos, $\alpha_k = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. *c)* Hay dos conjuntos, $\alpha_k^{(1)} = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$ y $\alpha_k^{(2)} = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

4. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Usando las fórmulas de adición de ángulos para el seno y el coseno, prueba que:

$$\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(y-z) + \operatorname{sen}(z-x) = -4\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{y-z}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{z-x}{2}\right).$$

5. Sean x, y y z los respectivos ángulos de un triángulo. Utilizando las fórmulas de adición de ángulos para el seno y el coseno, demuestra en cada caso las identidades correspondientes:

a) $\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(2y) + \operatorname{sen}(2z) = 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$.
b) $\cos(2x) + \cos(2y) + \cos(2z) = -1 - 4\cos x \cos y \cos z$.
c) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z = 2 + 2\cos x \cos y \cos z$.

6. Empleando las fórmulas $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, de adición de ángulos para el seno junto con $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ y $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$, demuestra en cada caso las identidades correspondientes:

a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ para $-\infty < x < \infty$.
b) $\operatorname{sen}(x + \operatorname{arc\,sen} x) = x\cos x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{sen} x$ para $-1 \leq x \leq 1$.