UCLM Universidad Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad

Curso 2025/2026

Materia: Matemáticas II

INSTRUCCIONES: El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3,** y **elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5.** Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen.** Solo se permite el uso de **calculadoras de tipo 1 y 2,** tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos**.

Posibles penalizaciones por falta de rigor en cada bloque:
- Análisis: ejercicios 2 y 5 (-0,25)
- Probabilidad: ejercicio 1 (-0,25)
- Álgebra: ejercicio 3 (-0,25)
- Geometría: ejercicio 4 (-0,25)

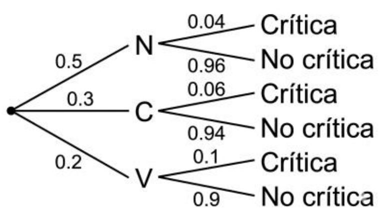
PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.
Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas.
Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

a) **[1 punto]** Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.
b) **[1 punto]** Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

Solución:

Sea N el suceso que representa que la alerta ocurra en el sistema de navegación; C el suceso de que ocurra en el sistema de comunicaciones y V que ocurra en el sistema vital.



a) $P(Crítica) = P(N)P(Crítica/N) + P(C)P(Crítica/C) + P(V)P(Crítica/V) = 0{,}5 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}06 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}058.$

b) $P\left({}^{V}/_{No\ Crítica}\right) = \frac{P(V \cap No\ Crítica)}{P(No\ crítica)} = \frac{P(V)P(No\ Crítica/V)}{1-P(Crítica)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}9}{1-0{,}058} = 0{,}1911.$

Criterios de corrección:

a) Plantear la expresión de la probabilidad, 0,25; desarrollar correctamente la probabilidad, 0,25; sustituir correctamente los valores de cada probabilidad; 0,25; obtener la solución correcta, 0,25.
b) Plantear la expresión de la probabilidad, 0,25; desarrollar correctamente la probabilidad, 0,25; sustituir correctamente los valores de cada probabilidad; 0,25; obtener la solución correcta, 0,25.

Pregunta 2.
Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0{,}5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

a) **[1,25 puntos]** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo
b) **[0,75 puntos]** A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.

Solución:

a) Para el estudio del crecimiento y decrecimiento de B(x) se deriva la función, obteniendo $B'(x) = e^{-0,5x}(80-40x)$. A continuación, se calculan sus puntos críticos, es decir, los puntos dónde se anula, y se obtiene x=2. Dado que el dominio de la función es $[0,\infty)$, se estudia el signo en los intervalos $(0,2)\ y\ (2,\infty)$, obteniendo que $B'(x) > 0$ en el intervalo $(0,2)$, por lo que B(x) es creciente y, $B'(x) < 0$ en el intervalo $(2,\infty)\ y$ B(x) es decreciente. En consecuencia, el beneficio crece hasta el segundo día y decrece a partir de este. Esto determina que el beneficio máximo se alcanza en el segundo día.

Criterios de corrección:
Calcular la derivada de la función, 0,25; obtener el valor de x que la hace nula, 0,25; encontrar y justificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, 0,50; determinar correctamente el día de beneficio máximo, 0,25.

b) Para estudiar el comportamiento a largo plazo, se calcula el $\lim_{x\to\infty} B(x)$, el cual presenta una indeterminación que se resuelve aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} 80x\cdot e^{-0,5x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{80x}{e^{0,5x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{80}{0,5\cdot e^{0,5x}} = \frac{80}{\infty} = 0$$

El beneficio tiende a estabilizarse en 0, es decir, a largo plazo los beneficios serían nulos.

Criterios de corrección: Resolver correctamente el límite de B(x), 0,5; interpretar su valor para B(x), 0,25

Pregunta 3.

a) **[1 punto]** Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que A·B=I, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} X+Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$

Solución:

a) Se multiplican las matrices, quedando la matriz $A\cdot B = \begin{pmatrix} 2-a & -1+a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-b & 0 & -1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Igualando término a término se hallan los valores de a=1 y b=2

Criterios de corrección: Obtener correctamente la matriz $A \cdot B$, 0,5; determinar correctamente las ecuaciones a resolver, 0,25; obtener la solución correcta, 0,25.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$. Se trata de resolver el sistema de ecuaciones matriciales cuya solución, en función de las matrices A y B, sería $X = 3A - B; Y = B - 2A$.
Sustituyendo A y B se obtiene que X=$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e Y=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Criterios de corrección: Hallar, razonadamente, la expresión matricial para X, 0,25; hallar, razonadamente, la expresión matricial para Y, 0,25; obtener correctamente las matrices solución del sistema, 0,5.

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a), \vec{v} = (2, a, 1)\ y\ \vec{w} = (-1, 1, -1)$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3.

Solución:

a) Los tres vectores son coplanarios si $[\vec{u}, \vec{v}. \vec{w}] = 0$. Se resuelve la igualdad y se obtiene:

$$[\vec{u}, \vec{v}. \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0$$; cuyas soluciones son $a = 1\ y\ a = -2$.

Criterios de corrección: condición para que los 3 vectores coplanarios, 0.25; obtención de la ecuación para calcular valores de a, 0.25; solución correcta para valores reales de a, 0.25.

b) El volumen del paralelepípedo se obtiene a través de la fórmula $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$. Para que el volumen sea de 10 u^3, se sustituyen los vectores, y se obtiene la expresión en función de a, que ya se obtuvo en el apartado anterior, y se iguala a 10. Resolviendo la ecuación $|a^2 + a - 2|$=10, se tiene que las soluciones son $a = 3\ y\ a = -4$.

Criterios de corrección:
Identificar correctamente la fórmula del volumen del paralelepípedo, 0,25; determinar correctamente el valor del determinante, 0,25; identificar correctamente la ecuación con valor absoluto, 0,25; obtener las dos soluciones correctas, 0,5.

Nota: Si la expresión para el determinante obtenida en el apartado anterior fuera errónea, pero el procedimiento subsiguiente fuera correcto, considerar correcto este apartado.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas P(1,2,6) y se desea instalar un segundo sensor en el punto P’, simétrico del anterior respecto del plano π.

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P’.

b) **[0,75 puntos]** Calcula la distancia entre los dos sensores.

Solución:

a) Se trata de calcular el punto P’, simétrico al punto P, respecto al plano π. Para ello, se obtiene el punto M, intersección de la recta r y el plano π, donde r es la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π. Este punto M es el punto medio del segmento que forman P y P’.

Para el cálculo de M, se considera un punto cualquiera de la recta r y se sustituye en la ecuación del plano. Como la recta r pasa por el punto P(1,2,6) y tiene de vector director $\vec{r}=(1,1,1)$, que coincide con el vector normal del plano π, cualquiera de sus puntos tiene de coordenadas $(1+t,\ 2+t,\ 6+t)$ con $t\in\mathbb{R}$. Si sustituimos dicha coordenadas en la ecuación del plano π, se obtiene que $t=-1$ y el punto M tiene de coordenadas $M(0,1,5)$.

Como M es el punto medio del segmento que forman P y P’, si se define P’(a, b, c), se tiene que: $(0,1,5)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{6+c}{2}\right)$, cuya solución es $a=-1, b=0\ y\ c=4$.

El segundo sensor estará situado en el punto de coordenadas $P'(-1,0,4)$

Criterios de corrección:

Determinar las coordenadas de un punto cualquiera de la recta (o las ecuaciones paramétricas), 0,5; obtener el punto intersección de la recta y el plano, 0,25; obtener correctamente las coordenadas del punto P’, 0,5

Nota: Si hubiera un error leve en el cálculo del punto medio pero el procedimiento que sigue es correcto, penalizar solamente el apartado correspondiente a la obtención de ese punto.

b) El cálculo de la distancia entre los dos sensores se puede resolver de dos formas: aplicando directamente la fórmula de la distancia entre esos dos puntos, $d(P,P')$, o viendo que la $d(P,P')=2d(P,\pi)$. Así pues:

(1ª forma) $d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=|(-2,-2,-2)|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}=3{,}46u.$

(2ª forma) $(P,P')=2d(P,\pi)=2\cdot\frac{|1+2+6-6|}{\sqrt{3}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}=3{,}46u.$

Criterios de corrección:

Escribir y desarrollar una expresión matemática para la distancia entre los dos puntos, 0,5; obtener el resultado correcto, 0,25.

Nota: En caso de haber obtenido un valor erróneo de P’ en el apartado anterior, se calificará positivamente este apartado siempre que el procedimiento sea correcto y coherente con dicho valor.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1.

a) **[1 punto]** Calcula justificadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x}$

b) **[1 punto]** Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot senx\, dx$

Solución

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{2x+1}{2x-3}-1\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-3}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^2$

Criterios de corrección: resolver correcta y razonadamente el límite, 0,75; obtener la solución correcta, 0,25.

b) La integral propuesta es una integral cíclica que se resuelve aplicando dos veces el método de integración por partes. En el primer paso, $u = senx\ y\ dv = e^x dx$ y, en el segundo, $u = cosx\ y\ dv = e^x dx$.

$\int e^x \cdot senx\, dx = e^x \cdot senx - \int e^x \cdot cosx\, dx = e^x \cdot senx - [e^x \cdot cosx + \int e^x \cdot senx\, dx] = e^x \cdot senx - e^x \cdot cosx - \int e^x \cdot senx\, dx.$

Despejando la integral, se obtiene:

$$2\int e^x \cdot senx\, dx = e^x \cdot senx - e^x \cdot cosx \quad \Longrightarrow \quad \int e^x \cdot senx\, dx = \frac{e^x \cdot (senx - cosx)}{2} + C$$

Criterios de corrección: resolver correcta y razonadamente la integral, 0,75; obtener la solución correctas, 0,25.

5.2. [2 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & si\ \ x < 1 \\ ax + b & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$, donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en x=1

Solución

Para que $f(x)$ sea continua en x=1, deben existir y coincidir $f(1)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$. Esta condición implica que $a + b = 2$

Para que $f(x)$ sea derivable en x=1, debe ser continua en dicho punto y, además, las derivadas laterales deben existir y coincidir, es decir, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$

La derivada de la función en puntos distintos de x=1 es $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} & si\ \ x < 1 \\ a & si\ \ x > 1 \end{cases}$, por lo que las derivadas laterales coinciden si $a = 1$.

Sustituyendo este valor en la condición obtenida anteriormente se tiene que, $f(x)$ es continua y derivable en x=1 si $a = 1\ y\ b = 1$.

Criterios de corrección: plantear la condición de continuidad, 0,25; determinar la condición de continuidad, 0,5; plantear la condición de derivabilidad, 0,25; calcular $f'(x)$, 0,5. Determinar la condición de derivabilidad, 0,25. Obtener la solución correcta, 0,25.