INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos**.
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- En una Comunidad Autónoma, el 40% de los clubes deportivos son de fútbol, el 15% de baloncesto y el 45% restante de otros deportes. En estos grupos, los clubes femeninos suponen el 20% en el caso del fútbol, el 45% en el de baloncesto y el 50% en el de otros deportes.

a) Si se elige un club deportivo al azar, calcula la probabilidad de que sea femenino. **(1 punto)**

b) Si el club elegido es femenino, calcula la probabilidad de que sea de baloncesto. **(1 punto)**

c) Si se seleccionan al azar dos clubes deportivos, calcule la probabilidad de que uno sea de fútbol y uno de otros deportes. **(0.5 puntos)**

Solución: Llamando CF = "El club es de fútbol", CB = "El club es de Baloncesto", CO = "El club es de otros deportes" y F = "El club es femenino", se tiene:

$$
\begin{array}{ll}
P(CF) = 0.4 & P\left({}^{F}/_{CF}\right) = 0.2 \\
P(CB) = 0.15 & P\left({}^{F}/_{CB}\right) = 0.45 \\
P(CO) = 0.45 & P\left({}^{F}/_{CO}\right) = 0.5
\end{array}
$$

a) Por el teorema de la probabilidad total, $P(F) = P\left({}^{F}/_{CF}\right)P(CF) + P\left({}^{F}/_{CB}\right)P(CB) + P\left({}^{F}/_{CO}\right)P(CO)$, por lo que $P(F) = 0.2 \cdot 0.4 + 0.45 \cdot 0.15 + 0.5 \cdot 0.45 = 0.3725$ **(1 punto)**

b) Utilizando el teorema de Bayes, $P\left({}^{CB}/_{F}\right) = \frac{P\left({}^{F}/_{CB}\right)P(CB)}{P(F)} = \frac{0.45 \cdot 0.15}{0.3725} = \frac{0.0675}{0.3725} \approx 0.1812$ **(1 punto)**

c) El suceso "Uno de fútbol y uno de otros deportes" es la unión de "el primero seleccionado es de fútbol y el segundo de otros deportes" y "el primero seleccionado es de otros deportes y el segundo de fútbol". Al ser disjuntos, la probabilidad de la unión es la suma de probabilidades, es decir, $P(CF)P(CO) + P(CO)P(CF) = 2 \cdot 0.4 \cdot 0.45 = 0.36$ **(0.5 puntos)**

Ejercicio 2.- Una empresa invirtió un total de 20000 euros entre tres fondos de inversión: A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0.05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0.1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0.02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 994 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió la empresa en cada fondo. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra cuánto dinero se ha invertido en cada uno de los fondos de inversión. **(1 punto)**

Solución: Llamando $a =$ "dinero invertido en el fondo A", $b =$ "dinero invertido en el fondo B", $c =$ "dinero invertido en el fondo C".

a) El sistema que se plantea es: $\begin{cases} a+b+c=20000 \\ 0.05a+0.1b+0.02c=994 \\ a-3b-3c=0 \end{cases}$ **(0.5 puntos por cada ecuación bien planteada)**

b) La solución del sistema es: $(a, b, c) = (15000, 1800, 3200)$ euros. Por tanto, se invierte 15.000 € en el fondo A, 1.800 € en el fondo B y 3.200 € en el fondo C. **(0,5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0,5 puntos por la solución correcta)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) La profundidad de la capa de arena en una playa se verá afectada por la construcción de un dique. La profundidad (*P*) en función del tiempo, en años desde el inicio de la construcción (*t*) vendrá dada por la función $P(t) = \begin{cases} 2+t^2 & si\ 0 \le t \le 1 \\ \frac{8t^2-t-1}{2t^2} & si\ t > 1 \end{cases}$. Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo.

a.1) ¿Es la profundidad una función continua del tiempo? **(1 punto)**

a.2) ¿Disminuirá alguna vez la profundidad? **(1 punto)**

a.3) Por mucho tiempo que pase ¿será necesario elevar la altura del paseo por causa de la profundidad de la capa de arena? **(0.5 puntos)**

Solución:

a.1) Como en ambas ramas la función es continua, hay que comprobar si lo es en el punto de unión $t = 1$. En él, $\lim_{t\to 1^-} 2+t^2 = 3 = \lim_{t\to 1^+} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = P(1)$. Luego la función es continua en $t = 1$.**(1 punto)**

a.2) Si se calcula la primera derivada de la función,

$$P'(x) = \begin{cases} 2t & si\ 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{(16t-1)(2t^2)-(8t^2-t-1)(4t)}{4t^4} & si\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t & si\ 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{t^2+2t}{2t^4} & si\ t > 1 \end{cases}$$

es siempre positiva, luego la función es siempre creciente. **(1 punto)**

a.3) Si $0 \le t \le 1$ el máximo de la función es $\max\limits_{0\le t\le 1} P(t) = P(1) = 2$ metros. Para $t > 1$, la ecuación $\frac{8t^2-t-1}{2t^2} = 4 \Leftrightarrow 8t^2 - t - 1 = 8t^2 \Leftrightarrow t = -1$ que no está en el intervalo de definición por lo que la función no puede alcanzar un valor de 4 metros.

Alternativamente, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \left(4 + \frac{-t-1}{2t^2}\right) = 4 + \lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{-t-1}{2t^2}\right) = 4 + 0 = 4$. Luego no será necesario elevar la altura del paseo. **(0.5 puntos)**

Apartado b) Un profesor ha comprobado que el grado de atención, puntuado de 0 a 100, que le prestan sus alumnos durante los 40 minutos de duración de su clase sigue la siguiente función $F(t) = at(b-t)$ con $0 \leq t \leq 40$. Sabiendo que a los 20 minutos de comenzar la clase le prestan la máxima atención, es decir, el grado de atención es 100, se pide:

b.1) Determina, justificando la respuesta, a y b. **(1 punto)**

b.2) Halla la atención a los cinco minutos. **(0.5 puntos)**

b.3) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AXA^{-1} = B$. **(1 punto)**

Solución:

b.1) De los datos del problema tenemos que $F'(20) = 0$ y que $F(20) = 100$. De ahí obtenemos el sistema $\begin{cases} ab - 40a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ó } b = 40 \\ 20ab - 400a = 100 \Rightarrow (a = 0 \; no \; es \; posible) \end{cases} \Rightarrow b = 40 \Rightarrow a = 1/4.$ **(1 punto)**

b.2) El valor de la función es $F(5) = 43{,}75$. **(0.5 puntos)**

b.3) $AXA^{-1} = B \iff X = A^{-1}BA$. Teniendo en cuenta que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un coto de caza de Ciudad Real hay conejos y perdices. Por indicación de la Consejería de Agricultura de la JCCM, se han determinado las siguientes restricciones: el número máximo de piezas cazadas es de 400, se permite la captura de un número de conejos superior o igual al de perdices y el número máximo de conejos que se pueden cazar es de 240. Si al dueño del coto le proporciona un beneficio de 35 € por conejo y 43 € por perdiz,

a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**

a.2) Determina cuántos conejos y perdices se deben cazar para que el beneficio sea máximo y encuentra dicho beneficio máximo. **(1 punto)**

Solución:

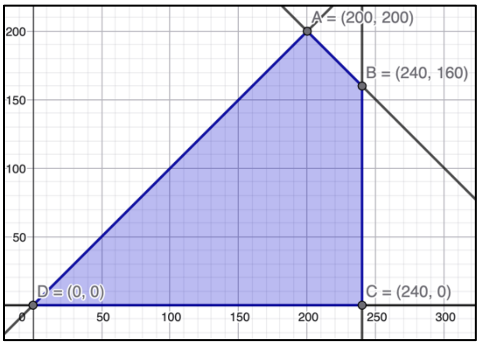
a.1) Sea $x =$ número de conejos cazados, $y =$ número de perdices cazadas.

El programa que hay que resolver es el siguiente:

$$Beneficio(x, y) = 35\text{x} + 43\text{y}$$

con las restricciones:

$$\text{s.a:}\begin{cases} x + y \leq 400 \\ 0 \leq y \leq x \\ x \leq 240 \end{cases}$$



(0.5 puntos por la función objetivo; 0.5 puntos por las restricciones y 0.5 puntos por la región factible)

a.2) El beneficio en cada uno de los vértices es: Beneficio(A) = 15.600 €; Beneficio(B) = 15.280 €; Beneficio(C) = 10.302 €; Beneficio(D)=0 €. Por tanto, el beneficio será máximo cuando se cacen 200 conejos y 200 perdices.**(0.5 puntos por evaluar los puntos y 0.5 puntos por la respuesta correcta del máximo)**

Apartado b) Una operadora de telefonía móvil estima que la duración, en segundos, de las llamadas sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 60$ segundos. Se seleccionan al azar 36 llamadas telefónicas y se observa que su duración media es de 240 segundos. Con un nivel de confianza del 95%,

b.1) Obtén un intervalo de confianza para la duración media poblacional de todas las llamadas de esa operadora. **(1 punto)**

b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 100 llamadas. **(0.75 puntos)**

b.3) Si se desea que una duración media de 230 segundos no esté contenida en el intervalo del apartado b.1), justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

b.1) $z_{0.975} = 1.96, \quad I.C._{0.95} = \left(\bar{x} \pm z_{0.975}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = \left(240 \pm 1.96 \cdot {}^{60}/_{\sqrt{36}}\right) = (220.4\,, 259.6)$

(Obtención del cuantil, 0.25 puntos; planteamiento del intervalo, 0.5 puntos; solución, 0.25)

b.2) Si aumenta el tamaño muestral hasta 100, se reduce más la desviación típica de la media muestral, por lo que la amplitud del intervalo también se reduce a 23,52 segundos ($\bar{x} \pm 11{,}76$) segundos. **(Referencia al tamaño muestral, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)**

b.3) El valor $\mu = 230$ está en el intervalo al 95% de confianza; para que no lo esté, es necesario reducir la amplitud del intervalo de confianza, lo que se puede conseguir disminuyendo el cuantil de la distribución Z, es decir, disminuyendo el nivel de confianza. **(Conclusión, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)**