PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 (2022)
Adaptación del modelo de examen a causa de COVID-19
Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales
Esta prueba consta de dos propuestas (A y B) de seis preguntas cada una. El alumno debe contestar a un máximo de 4 problemas de la propuesta elegida. Todos los ejercicios puntúan 2.5 puntos. Se puede utilizar la calculadora.

Propuesta A

1. *Una tienda de alimentación tiene a la venta 3 tipos de vinagres: Módena, vino de cava y Jerez. Los precios por botella son de 1.5, 2 y 1.75 euros respectivamente. La cantidad de botellas vendidas de vinagre de Jerez equivale a las tres cuartas partes de la suma de botellas vendidas de vinagre de Módena y de vino de cava y se vendieron el doble de botellas de vinagre de Jerez que de botellas de vino de cava. El total recaudado por la venta de las botellas de vinagre fue de 48 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar las botellas de cada tipo que se vendieron. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema. (1 punto)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ nº de botellas de vinagre de Módena; $y \equiv$ nº de botellas de vinagre de vino de cava; $z \equiv$ nº de botellas de vinagre de Jerez.

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{3}{4}(x+y)=z \\ 1.5x+2y+1.75z=48 \\ z=2y \end{array}\right. \qquad \text{(0.5 puntos por cada ecuación bien planteada).}$$

b) La solución del sistema es $(x,y,z)=(10,6,12)$ botellas. Se venden 10 botellas de vinagre de Módena, 6 de vinagre de vino de cava y 12 de vinagre de Jerez (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.5 puntos por la solución correcta).

2. *Dada la función* $f(x)=\left\{\begin{array}{cc} x^2-5 & si\ x\le -2 \\ -6 & si -2<x<2 \\ \frac{-3}{x^2-9} & si\ x\ge 2 \end{array}\right.$

a) Estudia el dominio de la función $f(x)$. (1 punto)

b) Estudia la continuidad en $x=-2$. (0.75 puntos)

c) Calcula $\lim_{x\to 3} f(x)$. (0.75 puntos)

Solución:

a) En $(-\infty,-2)$ la función es polinómica cuyo dominio es $\mathbb{R}$, el mismo caso en $(-2,2)$ que corresponde a una recta horizontal. El dominio para el tercer intervalo es

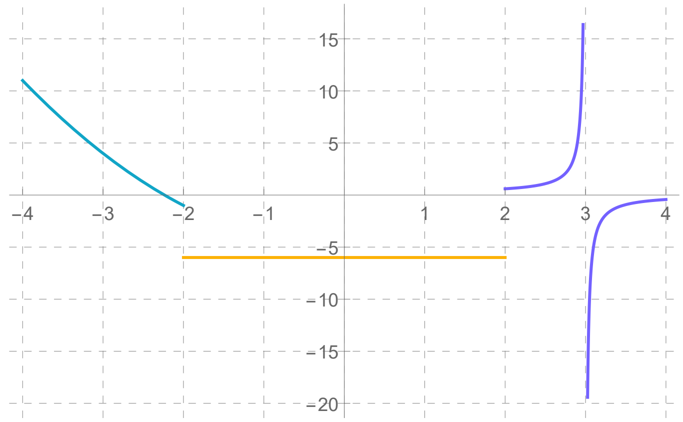
$D\left(\frac{-3}{x^2-9}\right) = \{x\in\mathbb{R}/x^2-9\neq 0\} = \mathbb{R}-\{\pm 3\} \Rightarrow D(f(x)) = (-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$. (1 punto)

b) La función es continua en $x=-2 \Leftrightarrow \lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)$. Para que exista el límite los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2}(x^2-5)=-1$ y $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2}(-6)=-6$.

Como $\lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito. (0.75 puntos)

c) Calculamos los límites laterales $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{-3}{x^2-9}=+\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{-3}{x^2-9}=-\infty$. (0.75 puntos)



3. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6&5&1\\0&2&1\\-1&-2&7\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}4&-5\\-3&4\end{pmatrix}$

a) Calcula $(B-C)^T\cdot A$. *(1.5 puntos)*

b) Comprueba si la matriz C *tiene inversa y explica por qué el producto* $3D^2\cdot A$ *no puede ser realizado. (1 punto)*

Solución:

a) $(B-C)^T\cdot A=\left(\begin{pmatrix}6&5&1\\0&2&1\\-1&-2&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^T\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5&-1\\0&3&3\\-1&-2&7\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}7&0&-1\\5&3&-2\\-1&3&7\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-37\\-26\\22\end{pmatrix}$. (1.5 puntos)

b) C es una matriz singular ya que tiene una fila de ceros $\Rightarrow\nexists\ C^{-1}$. (0.5 puntos)

En $3D^2\cdot A$ se observa que $\dim D=2\times2$, por tanto también la de su cuadrado y $\dim A=3\times1$. Al no coincidir el número de columnas de D^2 con el número de filas de A la multiplicación no puede realizarse. (0.5 puntos)

4. *Dada la función* $f(x)=\frac{5}{3}x^3-10x^2+15x-6$, *se pide:*

a) Calcular los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función. (1.5 puntos)

b) Averiguar los puntos de inflexión. (0.5 puntos)

c) Estudiar la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad). (0.5 puntos)

Solución:

a) Los posibles máximos y mínimos verifican $f'(x)=0\Rightarrow f'(x)=5x^2-20x+15=0\Leftrightarrow x=1$ y $x=3$. Se evalúan los valores obtenidos en $f''(x)=10x-20$ para determinar si los puntos encontrados son máximos o mínimos.

$f''(1)=10\cdot1-20=-10<0\Rightarrow$ máximo. (0.5 puntos)

$f''(3)=10\cdot3-20=10>0\Rightarrow$ mínimo. (0.5 puntos)

Los puntos obtenidos son:

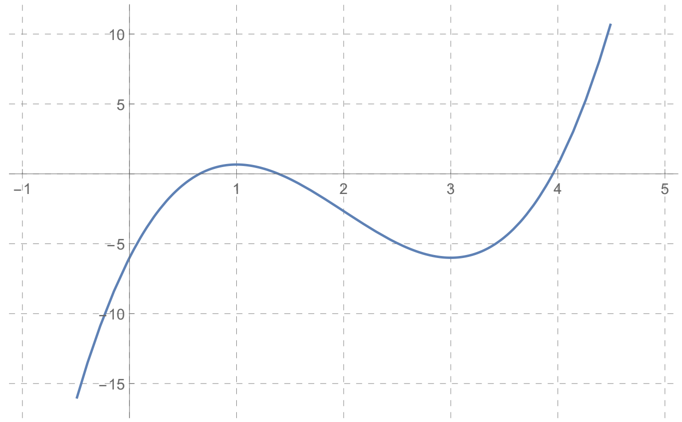
$f(1)=\frac{5}{3}\cdot1^3-10\cdot1^2+15\cdot1-6=\frac{2}{3}\Rightarrow P\left(1,\frac{2}{3}\right)$ máximo relativo. (0.25 puntos)

$f(3)=\frac{5}{3}\cdot3^3-10\cdot3^2+15\cdot3-6=-6\Rightarrow P(3,-6)$ mínimo relativo. (0.25 puntos)

b) Los posibles puntos de inflexión cumplen $f''(x)=10x-20=0\Leftrightarrow x=2$. Se evalúa en $f'''(x)=10\Rightarrow f'''(2)=10\neq0$ confirmando que es punto de inflexión.

Por tanto, $f(2)=\frac{5}{3}\cdot2^3-10\cdot2^2+15\cdot2-6=-\frac{8}{3}\Rightarrow P\left(2,-\frac{8}{3}\right)$ punto de inflexión. (0.5 puntos)

c) El estudio de concavidad viene dado por el signo de la segunda derivada: $f''(x)=0$ para $x=2$ y $f''(x)>0$ para el intervalo $(2,\infty)$ que es convexa (si se le llama convexa a la forma $\cup$) y $f''(x)<0$ en $(-\infty,2)$ y será cóncava ($\cap$) (0.5 puntos)



5. *Un test de antígenos da positivo en el 98 % de las personas que tienen la COVID, pero también da positivo en un 3 % de personas sanas (falso positivo). Si se sabe que el 22 % de la población tiene la COVID:*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga la COVID y un resultado positivo en el test? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un resultado positivo en un test? (1 punto)

c) Si se sabe que una persona ha dado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la COVID? (1 punto)

Solución:

$E =$ Enfermo; $E^c =$ Sano; $+ =$ Positivo; $+^c =$ Negativo.

$P(E) = 0.22$; $P(E^c) = 0.78$; $P(+ \mid E) = 0.98$; $P(+ \mid E^c) = 0.03$; $P(+^c \mid E) = 0.02$; $P(+^c \mid E^c) = 0.97$.

a) $P(E \cap +) = P(E) \cdot P(+ \mid E) = 0.22 \cdot 0.98 = 0.2156$. (0.5 puntos)

b) $P(+) = P(E) \cdot P(+ \mid E) + P(E^c) \cdot P(+ \mid E^c) = 0.22 \cdot 0.98 + 0.78 \cdot 0.03 = 0.239$. (1 punto)

c) $P(E \mid +) = \frac{P(E\cap +)}{P(+)} = \frac{P(E)\cdot P(+\mid E)}{P(+)} = \frac{0.22\cdot 0.98}{0.239} = 0.902$. (1 punto)

6. *La nota de una determinada asignatura sigue una distribución normal de media desconocida y varianza* $\sigma^2 = 2.25$ *puntos. Se ha tomado una muestra de* 10 *alumnos y los notas obtenidas en la asignatura han sido* 9, 7, 6.5, 5, 4, 6, 4.5, 3, 8.5 *y* 6 *puntos.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la nota de la asignatura con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) El profesor de la asignatura afirma que la nota media de la clase es de 6.5 puntos. ¿Se puede aceptar la afirmación del profesor con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{9+7+6.5+5+4+6+4.5+3+8.5+6}{10} = 5.95$ puntos.

Del enunciado se deduce: $\sigma^2 = 2.25$ horas$^2 \Rightarrow \sigma = 1.5$ puntos, $n = 10$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(5.95 - 1.96\frac{1.5}{\sqrt{10}},\ 5.95 + 1.96\frac{1.5}{\sqrt{10}}\right) = (5.02,\ 6.88)$. (0.5 puntos)

b) Al diminuir el tamaño de muestra, aumenta el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto aumentará la amplitud del intervalo. (0.5 puntos)

c) El valor de 6.5 puntos está en el intervalo calculado al 95 %, como al aumentar el nivel de confianza, aumenta la amplitud del intervalo, el valor de 6.5 puntos también estará en el IC al 99 % y por lo tanto se puede aceptar la afirmación. (1 punto)

Propuesta B

1. *Los 3 modelos de lápices USB más vendidos en una distribuidora son de* 128, 64 *y* 32 *GB y tienen un precio de* 12, 7 *y* 3 *euros respectivamente. La diferencia entre las unidades vendidas de lápices de* 128 *GB y lápices de* 64 *GB es igual a la tercera parte de las unidades vendidas de lápices de* 32 *GB. Se venden* 500 *unidades más de los lápices de* 128 *GB que de los de* 64 *GB. Por las ventas de los tres tipos de USB se han obtenido* 54200 *euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita saber cuántas unidades de cada tipo se han vendido. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema. (1 punto)

Solución:

a) Sea $x \equiv$ nº de lapices USB de 128 GB; $y \equiv$ nº de lapices USB de 64 GB; $z \equiv$ nº de lapices USB de 32 GB.

$$\left\{\begin{array}{c} x - y = \frac{z}{3} \\ x - 500 = y \\ 12x + 7y + 3z = 54200 \end{array}\right. \qquad \text{(0.5 puntos por cada ecuación bien planteada).}$$

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (2800, 2300, 1500)$ lapices. El número de lápices de 128 GB es de 2800, de los de 64 GB hay 2300 y tenemos 1500 de 32 GB. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.5 puntos por la solución correcta).

2. *Dada la función* $f(x) = \left\{\begin{array}{cc} x+1 & si\ x<0 \\ a & si\ x=0 \\ \frac{x-1}{2x-1} & si\ x>0 \end{array}\right.$

a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en $x = 0$. *(0.75 puntos)*

b) Estudia el dominio de la función $f(x)$. *(1 puntos)*

c) Estudia la continuidad en $x = \frac{1}{2}$. *(0.75 puntos)*

Solución:

a) La función es continua en $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

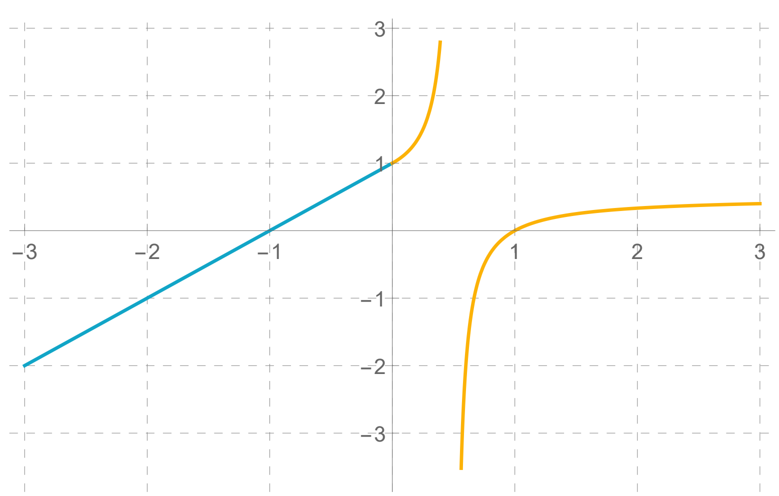
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{2x-1} = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x+1) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0) = a \Leftrightarrow a = 1$

b) En $(-\infty, 0)$ la función es polinómica cuyo dominio es $\mathbb{R}$. El dominio para el otro intervalo es

$D\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = \{x \in \mathbb{R}/2x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $\exists\ f(0) \Rightarrow D(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. (1 punto)

c) La función es continua en $x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$.

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{x-1}{2x-1} = +\infty$ y $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{x-1}{2x-1} = -\infty$ por lo que presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. (0.75 puntos)



3. *El número de reservas canceladas durante las anteriores fiestas de Navidad en una conocida cadena de hoteles están recogidas en la expresión $N(x) = -x^3 + 3x + 400$, siendo $N(x)$ el número de reservas canceladas y x el día de cancelación donde $1 \leq x \leq 7$ (siendo el primer día el 31 de diciembre y el último el 6 de enero).*

a) ¿Cuántas reservas se anulan el día 3 de enero? (0.5 puntos)

b) ¿En qué día hay el máximo número de anulaciones y a cuántas ascienden? (1 punto)

c) ¿En qué día hay el mínimo número de cancelaciones y cuántas son éstas? (1 punto)

Solución:

a) $N(4) = -4^3 + 3 \cdot 4 + 400 = 348$ cancelaciones. (0.5 puntos)

b) Máximo relativo si $N'(x) = 0$ y $N''(x) < 0$. $N'(x) = -3x^2 + 3$ y $N'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ donde solamente tiene sentido el valor positivo. $N''(x) = -6x \Rightarrow N''(1) = -6 < 0$. El máximo se presenta el primer día (31 de diciembre) y hay $N(1) = -1^3 + 3 \cdot 1 + 400 = 402$ cancelaciones. (1 punto)

c) A partir de aquí la función siempre decrece y el mínimo estará en el otro extremo del intervalo.

$N(7) = -7^3 + 3 \cdot 7 + 400 = 78$ cancelaciones. (1 punto)

4. *En una cooperativa preparan dos tipos de queso, suave y fuerte. El suave contiene un 1.5 l. de leche de cabra y 1.5 l. de leche de oveja, mientras que el fuerte contiene un 1 l. de leche de cabra y un 2 l. de leche de oveja. El precio de venta del queso suave es de 24 euros y el del queso fuerte son 40 euros. Si semanalmente se dispone de 75 l. de leche de cabra y 120 l. de leche de oveja y al menos hay que hacer 30 quesos suaves y 15 quesos fuertes, estudiar el número de quesos de cada tipo que maximiza los beneficios.*

a) Expresa la función objetivo. (0.5 puntos)

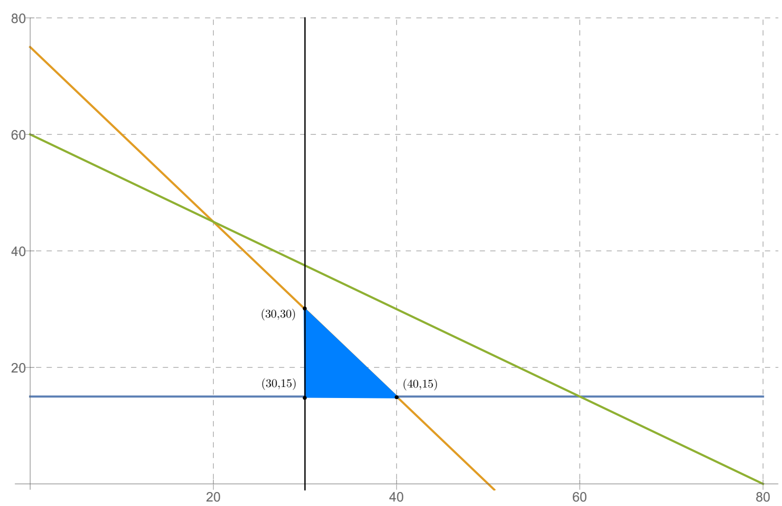
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

c) Halla el número de quesos suaves y fuertes que deben hacerse para que el beneficio sea máximo. (0.75 puntos)

Solución:

a) Llamando x al queso suave e y al queso fuerte, la función objetivo será: $Z = 24x + 40y$ (0.5 puntos)

b) Las restricciones del problema: $x \geq 30$, $y \geq 15$, $1.5x + y \leq 75$, $1.5x + 2y \leq 120$. (0.75 puntos por restricciones y 0.5 puntos por representar la región factible)



c) Los vertices de la región factible son: $A = (30, 15)$, $B = (30, 30)$, y $C = (40, 15)$. (0.5 puntos por los vértices).

Aplicados a la función objetivo $Z(A) = 24 \cdot 30 + 40 \cdot 15 = 1320$; $Z(B) = 24 \cdot 30 + 40 \cdot 30 = 1920$; $Z(C) = 24 \cdot 40 + 40 \cdot 15 = 1560$. Luego la solución es realizar 30 quesos suaves y 30 fuertes. (0.25 puntos por óptimo)

5. *De los 250 estudiantes matriculados en una determinada titulación, 90 son hombres. Para componer la mesa electoral en la elección de los delegados de la titulación, se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes. Calcular la probabilidad de que:*

a) Los tres estudiantes seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres estudiantes seleccionados sean del mismo sexo. (1 punto)

c) Al menos uno de los estudiantes seleccionados sea hombre. (1 punto)

Solución:

H = Hombre; M = Mujer.

a) $P(M \cap M \cap M) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(M) = \frac{160}{250} \cdot \frac{159}{249} \cdot \frac{158}{248} = 0.26$. (0.5 puntos)

b) $P((M \cap M \cap M) \cup (H \cap H \cap H)) = P(M \cap M \cap M) + P(H \cap H \cap H) = \frac{160}{250} \cdot \frac{159}{249} \cdot \frac{158}{248} + \frac{90}{250} \cdot \frac{89}{249} \cdot \frac{88}{248} = 0.26 + 0.046 = 0.306$. (1 punto)

c) $P(\text{Al menos uno } H) = 1 - P(\text{Ninguno } H) = 1 - P(M \cap M \cap M) = 1 - 0.26 = 0.74$. (1 punto)

6. *El tiempo en resolver el crucigrama de un determinado periódico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 5.4$ minutos. Se ha tomado una muestra de 9 personas y los tiempos empleados en resolver el crucigrama han sido 12, 14, 18, 19, 13, 12, 15, 22 y 19 minutos.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo en resolver el crucigrama con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) El periódico que elabora este crucigrama afirma que el tiempo medio en resolverlo es de 13 minutos. ¿Se puede aceptar la afirmación del periódico con un nivel de confianza del 98 %? Justificar la respuesta. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{12+14+18+19+13+12+15+22+19}{9} = 16$ minutos.

Del enunciado se deduce: $\sigma = 5.4$ minutos, $n = 9$, $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$. (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(16 - 2.17 \frac{5.4}{\sqrt{9}},\ 16 + 2.17 \frac{5.4}{\sqrt{9}}\right) = (12.094,\ 19.906)$. (0.5 puntos)

b) Para aumentar la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor dado, la única opción es disminuir el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) El valor de 13 minutos está en el intervalo calculado al 97 %. Como al aumentar el nivel de confianza, aumenta la amplitud del intervalo, el valor de 13 minutos también estará en el IC al 98 % y por tanto se puede aceptar la afirmación. (1 punto)